บทความวิจัย

ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก

Generalized Beauty: The Product of an *n*-Digit Number with 1's as All Its Digits and an (*n*+2)-Digit Number with *n*'s as Its First and Last Digits and 1's as All Inner *n* Digits

พีระพงษ์ เครื่องสนุก[1], เพชรรัตน์ เอี่ยมสอาด[1] และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์[1*]

Peerapong Kreangsanuk[1], Phetcharat Iamsaart[1] and Aiyared Iampan[1*]

Abstract

In this paper we apply the remainder number and the Principle of Mathematical Induction to obtain general form of product of an n-digit number with 1's as all its digits and an $(n+2)$-digit number with n's as its first and last digits and 1's as all inner n digits. The result shows that the general form of the product is

$n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=n(n+1)\ldots(n+n-1)n(n+n-1)\ldots(n+1)n$ **for any positive integer n.**

Keywords: *Remainder number, product, n-digit number with 1's as all its digits*

---

[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000

[*]ผู้ให้การติดต่อ (Corresponding E-mail: aiyared.ia@up.ac.th)

รับบทความวันที่ 25 กรกฎาคม 2557 รับลงตีพิมพ์วันที่ 3 ธันวาคม 2557

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณ ของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณดังกล่าว ดังนี้

$n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=n(n+1)\ldots(n+n-1)n(n+n-1)\ldots(n+1)n$ **สำหรับจำนวนเต็มบวก** n

คำสำคัญ: *จำนวนเศษเหลือ, ผลคูณ, จำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1*

บทนำ

การคำนวณผลลัพธ์ทางพีชคณิตของระบบจำนวน มีความสำคัญและเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของเราเป็นอย่างมาก การคำนวณผลลัพธ์บางอย่างของจำนวนที่มีจำนวนหลักมาก ๆ ยิ่งทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากและซับซ้อนมากขึ้น เครื่องมือบางอย่าง เช่น เครื่องคิดเลข และคอมพิวเตอร์ อาจไม่สามารถหาผลลัพธ์ให้เราได้ ดังนั้น หากเราสามารถหาสูตรลัด ซึ่งเป็นเครื่องมือที่มีความเหมาะสมในการคำนวณผลลัพธ์ของจำนวนที่มีจำนวนหลักมาก ๆ ได้ ก็จะเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้น ดังนั้น เราจึงสนใจที่จะศึกษาลักษณะทางพีชคณิตของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 โดยการศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 นั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ ซึ่งได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ดังนี้ สำหรับการศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเริ่มเมื่อปี พ.ศ. 2554 โดยอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่า ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 นี้ สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(1_{[n]})^2=123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่า ผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+n\le 9$ จะได้ว่า

$$mn\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}=m\underbrace{(m+n)(m+n)\ldots(m+n)}_{\#(m+n)=k-1}n$$

กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+1=t, m+n={}_rs$ และ $10\le m+n\le 18$ จะได้ว่า

$$mn\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}=(m+1)\underbrace{(r+s)(r+s)\ldots(r+s)}_{\#(r+s)=k-2}sn$$

นิคม หวลอารมณ์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนเต็มใด ๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มจำนวนเดียวกัน โดยในกรณีเฉพาะเป็นจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 นั้น สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n และ p เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=p}\times n=\underbrace{nnn\ldots n}_{\#(n)=p} \text{ และ } \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=p}\times(-n)=\underbrace{(-n)(-n)(-n)\ldots(-n)}_{\#(-n)=p} \text{ (ดู(3))}$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่า ผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้ กำหนดให้ q,p,s และ r เป็นจำนวนนับ โดยที่ $qpsr={}_q p\|_s r$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n\geq 2$ จะได้ว่า

$${}_q p\|_s r\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}={}_q p\,{}_q p\underbrace{({}_q p\boxplus{}_s r)({}_q p\boxplus{}_s r)({}_q p\boxplus{}_s r)\ldots({}_q p\boxplus{}_s r)}_{\#({}_q p\boxplus{}_s r)=n-2}{}_s r\,{}_s r$$

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหาความสัมพันธ์ของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบว่า ความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n\geq 2$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=9\times123\ldots(n-3)(n-2)(n-1)+n$$

กรกนก ชุมภูรัตน์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9 โดยได้พบว่า ผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$n\times9\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=m}=(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m-1}(10-n)$$

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b\neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a=b\cdot q+r \text{ และ } 0\leq r<|b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k\geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $n\geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของ

บทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) และ ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a=10\cdot q+r$ และ $0\le r<10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_q r \qquad (1)$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & 20 = {}_2 0 & 60 = {}_6 0 & 180 = {}_{18} 0 & 200 = {}_{20} 0 \\
1 = {}_0 1 & 21 = {}_2 1 & 61 = {}_6 1 & 181 = {}_{18} 1 & 201 = {}_{20} 1 \\
2 = {}_0 2 & 22 = {}_2 2 & 62 = {}_6 2 & 182 = {}_{18} 2 & 202 = {}_{20} 2 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
9 = {}_0 9 & 29 = {}_2 9 & 69 = {}_6 9 & 189 = {}_{18} 9 & 209 = {}_{20} 9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -60 = {}_{-6} 0 & -180 = {}_{-18} 0 & -200 = {}_{-20} 0 \\
-1 = {}_{-1} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -61 = {}_{-7} 9 & -181 = {}_{-19} 9 & -201 = {}_{-21} 9 \\
-2 = {}_{-1} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -62 = {}_{-7} 8 & -182 = {}_{-19} 8 & -202 = {}_{-21} 8 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
-9 = {}_{-1} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -69 = {}_{-7} 1 & -189 = {}_{-19} 1 & -209 = {}_{-21} 1
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0\le r<10$ เช่น ${}_0 2=2$ และ ${}_0 4=4$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R} = \{ {}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0\le r<10\} \qquad (2)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (1) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้น ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงเลขจาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_q r$ เมื่อ q คือ ผลหาร และ r คือ เศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้ว

นำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $9_1 04_{25} 8_4 22_{-16} 5_{73} 45_{-12} 98_{-6} 81$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
& 9_1 04_{25} 8_4 22_{-16} 5_{73} 45_{-12} 98_{-6} 81 \\
&= (9+1)0(4+25)(8+4)2(2-16)(5+73)4(5-12)9(8-6)81 \\
&= (10)0(29)(12)2(-14)(78)4(-7)9281 \\
&= {}_1 00_2 9_1 22_{-2} 6_7 84_{-1} 39281 \\
&= 10(0+2)(9+1)2(2-2)(6+7)8(4-1)39281 \\
&= 102(10)20(13)8339281 \\
&= 102_1 020_1 38339281 \\
&= 10(2+1)02(0+1)38339281 \\
&= 10302138339281
\end{aligned}
$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้น บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ โดย

$$
{}_q r \boxplus {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \quad ; & r+s \ge 10, r+s = {}_b a \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } {}_q r, {}_t s \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}
$$

บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ แล้ว

$$
-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ;\ r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ;\ r \ne 0 \end{cases} \tag{3}
$$

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับบทความนี้ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$$
{}_m s_1 s_2 s_3 \ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \ldots s_n \tag{4}
$$

ในการศึกษาหัวข้อถัดไป จะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน สำหรับจำนวนเต็ม n เช่น $\#(1)$ แทนจำนวนของ 1 ที่เรียงติดกัน และ $\#(0)$ แทนจำนวนของ 0 ที่เรียงติดกัน เช่น $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=5}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=6} = 11111000000$ และจะแสดงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่พบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดด

ทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก จนนำไปสู่การศึกษาและการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักด้วย

ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ทำให้เราเห็นความสัมพันธ์บางอย่างที่น่าสนใจและแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของผลคูณดังนี้

$$\begin{array}{lrcrcr} \#(1)=1: & 111 & \times & 1 & = & 111 \\ \#(1)=2: & 2112 & \times & 11 & = & 23232 \\ \#(1)=3: & 31113 & \times & 111 & = & 3453543 \\ \#(1)=4: & 411114 & \times & 1111 & = & 456747654 \\ \#(1)=5: & 5111115 & \times & 11111 & = & 56789598765 \end{array} \qquad (5)$$

จากความสัมพันธ์ (5) เราสังเกตเห็นว่าผลคูณของ $n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n$ กับ $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots,5$ จะมีลักษณะคือ หลักแรก หลักตรงกลาง และหลักสุดท้าย มีค่าเท่ากับจำนวนหลักของเลข 1 ส่วนเลขในหลักอื่น ๆ จะเป็นเลขเรียงกันอย่างสวยงาม ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

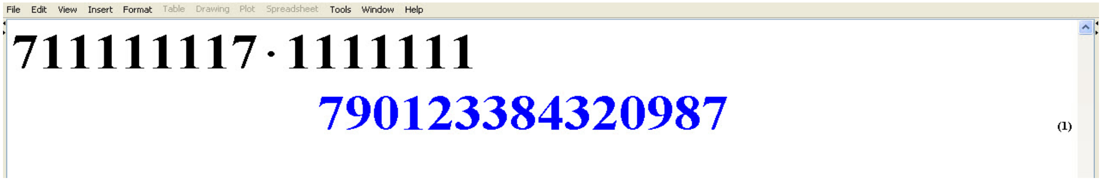
$$n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=n(n+1)\ldots(n+n-1)n(n+n-1)\ldots(n+1)n \quad \text{เมื่อ } n=1,2,3,4,5$$

ต่อไปเราจะยกตัวอย่างที่นำไปสู่การศึกษาหลัก ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการหาคำตอบในตัวอย่าง 1 นั้นสามารถหาคำตอบสุดท้ายได้ยาก แต่ถ้าหากใช้ข้อสังเกตที่เราค้นพบในข้างต้น จะเห็นได้ทันทีว่าการหาคำตอบนั้นสามารถทำได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 1 ผลลัพธ์ของ $7\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7}7\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7}$ สามารถคำนวณหาได้อย่างถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราพบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 7\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7}7\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7} &= 789(10)(11)(12)(13)7(13)(12)(11)(10)987 \\ &= 789{}_10{}_11{}_12{}_137{}_13{}_12{}_11{}_10987 \\ &= 78(10)123384320987 \\ &= 78{}_10123384320987 \\ &= 790123384320987 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 1. $7\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7}7\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7}$

ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ (5) เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลคูณที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราพบหรือไม่

บทตั้งต่อไปนี้มีความสำคัญอย่างมากสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

บทตั้ง 2 สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n จะได้ว่า

$$m\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n+1}m = m\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}m + (9\cdot m+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+1} \qquad (6)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} m\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}m + (9\cdot m+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+1} &= (m+9\cdot m+1)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}m \\ &= (10\cdot m+1)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}m \\ &= {}_{m}1\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}m \\ &= m\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n+1}m \end{aligned}$$

ดังนั้น $m\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n+1}m = m\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}m + (9\cdot m+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+1}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n □

บทตั้ง 3 สำหรับจำนวนเต็มบวก m, n และ k จะได้ว่า

$$k\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n} = \underbrace{kkk\ldots k}_{\#(k)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m} \qquad (7)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
& k\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}\\
&= k\times1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}\\
&= k\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}\\
&= \underbrace{\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}}_{k\ \text{ครั้ง}}\\
&= \underbrace{kkk\ldots k}_{\#(k)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $k\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(0)=n}=\underbrace{kkk\ldots k}_{\#(k)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m,n และ k □

บทตั้ง 4 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+1}1\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}00\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} \qquad (8)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+1}1\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} &= (1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+2}+1)\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\\
&= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+2}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\\
&= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}00\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n+1}1\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}00\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n □

จากบทตั้งทั้งสามทำให้เราได้รับทฤษฎีบทหลัก ดังนี้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=n(n+1)\ldots(n+n-1)n(n+n-1)\ldots(n+1)n \qquad (9)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=n(n+1)\ldots(n+n-1)n(n+n-1)\ldots(n+1)n$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $111\times1=111$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$k\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}k\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}=k(k+1)\ldots(k+k-1)k(k+k-1)\ldots(k+1)k$$

พิจารณา

$(k+1)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}(k+1)\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}$

$=[k\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}k+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}1]\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}$

$=[k\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}k+(k1-k)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}1]\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}$

$=[k\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}k+(k1-k)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}1]\times[\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}]$

$=k(k+1)\ldots(k+k-1)k(k+k-1)\ldots(k+1)k$—(A)

$+\underbrace{(k1-k)(k1-k)\ldots(k1-k)}_{\#(k1-k)=k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}$—(B)

$+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}00\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}$—(C)

$+k\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}k\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$—(D)

$+(k1-k)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$—(E)

$+1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$—(F)

$=(k+k1-k)(k+1+k1-k)\ldots(k+k-1+k1-k)k(k+k-1)\ldots(k+1)k$—(A)+(B)

$+(k+k1-k)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}k\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$—(D)+(E)

$+1\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}01\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}$—(C)+(F)

$=(k1)(1+k1)\ldots(k-1+k1)k(k+k-1)\ldots(k+1)k$—(G)

$+(k1)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}k\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$—(H)

$+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}0\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}$—(I)

$=(k1)(k1+1)(1+k1+1)\ldots(k-1+k1+1)(k+k)(k+k-1)\ldots(k+1)k$—(G)+(H)

$+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}0\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}$—(I)

$=(k1)(k1+1)(k1+2)\ldots(k1+k)(2\cdot k)(k+k-1)\ldots(k+1)k$—(J)

$+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}0\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}$—(I)

$=1(k1+1)(k1+1+1)(k1+2+1)\ldots(k1+k-1+1)(k1+k)$

$(2\cdot k+1)(k+k-1+1)\ldots(k+1+1)(k+1)$—(J)+(I)

$$=1(k1+1)(k1+2)(k1+3)\ldots(k1+k)(k1+k)(2\cdot k+1)(2\cdot k)\ldots(k+2)(k+1)$$
$$=1(k2)(k3)(k4)\ldots(k(k+1))(k(k+1))(2\cdot k+1)(2\cdot k)\ldots(k+2)(k+1)$$
$$=1_k 2_k 3_k 4\ldots_k (k+1)_k (k+1)(2\cdot k+1)(2\cdot k)\ldots(k+2)(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)\ldots(2\cdot k)(2\cdot k+1)(k+1)(2\cdot k+1)(2\cdot k)\ldots(k+2)(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)\ldots(k+1+(k+1)-1)(k+1)(k+1+(k+1)-1)\ldots(k+2)(k+1)$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=n(n+1)\ldots(n+n-1)n(n+n-1)\ldots(n+1)n$$

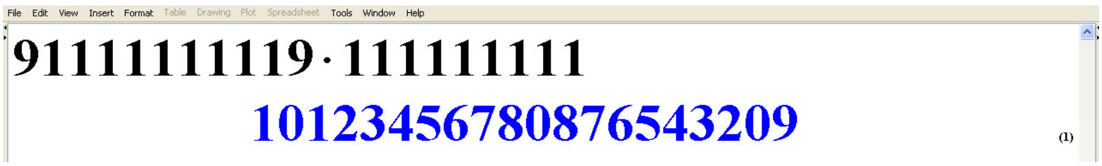
สำหรับจำนวนเต็มบวก n $\square$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=9}9\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=9}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=9}9\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=9} &= 9(10)(11)\ldots(17)9(17)\ldots(11)(10)9\\ &= 9_1 0_1 1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1 7 9_1 7_1 6_1 5_1 4_1 3_1 2_1 1_1 09\\ &= (10)12345677(10)876543209\\ &= {}_1012345677_10876543209\\ &= 1012345678087654320 9\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 2. $9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=9}9\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=9}$

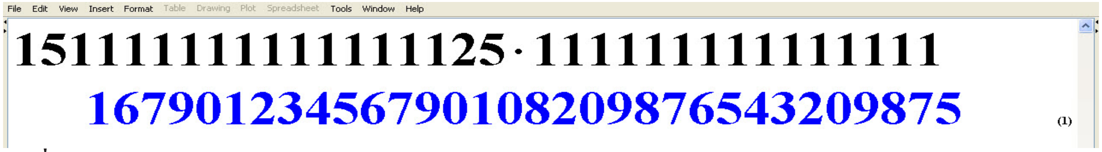
ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $(15)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=15}(15)\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=15}=15\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=14}25\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=15}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$(15)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=15}(15)\times\underbrace{111\ldots111}_{\#(1)=15}$$
$$=(15)(16)(17)\ldots(29)(15)(29)\ldots(17)(16)(15)$$
$$={}_1 5_1 6_1 7_1 8_1 9_2 0_2 1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2 9_1 5_2 9_2 8_2 7_2 6_2 5_2 4_2 3_2 2_2 1_2 0_1 9_1 8_1 7_1 6_1 5$$
$$=16789(11)23456789(10)(10)7(11)(10)98765431(10)9875$$

$$
\begin{aligned}
&= 16789_1 123456789_1 0_1 07_1 1_1 098765431_1 09875 \\
&= 1678(9+1)12345678(9+1)(0+1)0(7+1)(1+1)09876543(1+1)09875 \\
&= 1678(10)12345678(10)108209876543209875 \\
&= 1678_1 012345678_1 0108209876543209875 \\
&= 167(8+1)01234567(8+1)0108209876543209875 \\
&= 16790123456790108209876543209875
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 3. $(15)\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=15}(15)\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=15}$

บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$n\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = n(n+1)\ldots(n+n-1)n(n+n-1)\ldots(n+1)n$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n

(2) รูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ที่ได้นั้น มีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราสังเกตพบ

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ตามทฤษฎีบท 4 นั้น นับว่าเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เราหาผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็วและสะดวกมากขึ้น จากบทความนี้และบทความอื่น ๆ ที่ได้กล่าวถึง ผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่าง ๆ ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าน่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ และนอกจากผล

การศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

กรกนก ชุมภูรัตน์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2557. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9. วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา 7(1): 64-74.

ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. วารสารนเรศวรพะเยา 6(1): 25-30.

ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารวิจัยมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม 8(15-16): 1-10.

ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร 5(10): 61-71.

นิคม หวลอารมณ์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนเต็มใด ๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน. วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ 16(1): 51-58.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ 8(2): 48-58.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา 4(2): 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 41(4): 919-927.

Clark, W. E. 2002. Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida.