การวิเคราะห์การอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบแกมมา

An Analysis of an Exact Inference of a Gamma Model

อังสนา เพชรศักดิ์วงศ์[1*], เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์[2]

Angsana Petsakvong, Seksan Kiatsupaibul

[1]นิสิตปริญญาโท ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[2]ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Abstract

The purpose of this research is to study the method of finding an exact confidence set and a confidence band of a standard two parameter gamma model and to compare the empirical confidences of the confidence sets and the confidence bands obtained from the exact method and a standard asymptotic method. This method of finding an exact confidence set of a gamma model is based on Kolmogorov-Smirnov tests. The research investigates the properties of the confidence sets and confidence bands of the gamma distribution when the shape parameters and the rate parameters, respectively, are (0.5, 0.5), (3, 0.5) and (3, 2), and when the sample sizes are 10, 30 and 100, at the confidence level of 0.95 and 0.99. From the analysis, the empirical confidences of the confidence sets and the confidence bands derived from the exact method provide confidence levels approximately 0.95 and 0.99, respectively, and the confidences from the exact method is closer to the target confidences than those from the standard asymptotic method.

Keywords: *Gamma distribution, Confidence set, Confidence bands, Empirical confidence*

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์ และเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้า วิธีในการหาเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมานี้จะขึ้นกับการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ โดยการวิจัยนี้จะอาศัยคุณสมบัติของการแจกแจงแกมมาที่มีค่าพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง และค่าพารามิเตอร์แสดงอัตราตามลำดับ ดังนี้ (0.5,0.5), (3,0.5) และ (3,2) ขนาดตัวอย่างเป็น 10, 30 และ 100 ที่ระดับความเชื่อมั่นคือ 0.95 และ 0.99 จากผลการวิเคราะห์ พบว่า ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่วัดได้จากวิธีแท้จริงจะใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่น 0.95 และ 0.99 ตามลำดับ และความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้จากวิธีแท้จริงจะใกล้เคียงกับความเชื่อมั่นที่กำหนด มากกว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้จากวิธีลู่เข้า

คำสำคัญ: *การแจกแจงแกมมา, เซตความเชื่อมั่น, แถบความเชื่อมั่น, ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์*

บทนำ

ในการประมาณแบบช่วงของพารามิเตอร์ของประชากร $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ ที่อยู่ในปริภูมิพารามิเตอร์ Θ ใน k มิตินั้น เราจะได้เป็นเซตของจุดที่อยู่ใน k มิติ บางครั้งเซตของจุดเหล่านี้อาจล้อมรอบด้วยรูปร่างลักษณะใดลักษณะหนึ่ง โดยเซตของจุดเหล่านี้ ก็คือ เซตความเชื่อมั่น ซึ่งเซตความเชื่อมั่นที่ถูกสร้างจากพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้สามารถบ่งบอกถึงขอบเขตระดับความไม่แน่นอนของฟังก์ชันการแจกแจงที่ประมาณจากข้อมูลได้ หรือก็คือ แถบความเชื่อมั่น แต่ขั้นตอนวิธีในการหาเซตความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ใน k มิติ ให้มีระดับความเชื่อมั่นในขณะเดียวกันเท่ากับ $1-\alpha$ นั้น มักมีความยุ่งยากและซับซ้อน อย่างไรก็ตาม แนวทางที่ดีแนวทางหนึ่งในการหาเซตความเชื่อมั่น คือ การใช้การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Hayter, A.J. and Kiatsupaibul, S., 2013)

ผู้วิจัยจึงสนใจพิจารณากรณีตัวแบบแกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์ ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแบบแกมมา อยู่ในรูปอัตราส่วนของฟังก์ชันแกมมาที่ไม่สมบูรณ์ ที่ไม่สามารถจัดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้ ส่งผลให้ไม่สามารถใช้วิธีโปรแกรมเชิงเส้นได้ ด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะศึกษาวิธีการอนุมานที่แท้จริงสำหรับตัวแบบแกมมา และการหาแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา โดยทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ระหว่างเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้า

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การสร้างเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง

การสร้างเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงถูกนำเสนอโดย Hayter, A.J. และ Kiatsupaibul, S. (2013) พิจารณาการแจกแจงแบบแกมมาด้วยพารามิเตอร์แสดงรูปร่างเท่ากับ k และพารามิเตอร์แสดงอัตราเท่ากับ β แทนด้วย $\Gamma(k,\beta)$ ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงคือ $F(x;k,\beta)$ และให้ฟังก์ชันการแจกแจงแกมมาแบบมาตรฐาน คือ $F_k(x) = F(x;k,1)$ จะได้ความสัมพันธ์ที่จะนำไปใช้ในลำดับต่อไป ดังนี้

$$F\left(x;k,\beta\right) = F_k(\beta x)$$

ให้ฟังก์ชันควอนไทล์ของการแจกแจงแกมมาแบบมาตรฐานคือ $\Gamma(k,1)$ แทนด้วย $\Gamma_k(p)$ นั่นคือ $F\left(\Gamma_k(p);k,1\right) = p$ ส่วนการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟขนาด α ของข้อมูลที่มาจากการแจกแจงแกมมานี้ จะมีบริเวณการยอมรับสมมติฐาน คือ

$$\frac{i}{n} - d_{\alpha,n} \leq F(X_{(i)};k,\beta) \leq \frac{i-1}{n} + d_{\alpha,n}$$

เมื่อให้ $1 \leq i \leq n$ และ $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ เป็นค่าที่เรียงลำดับแล้วของตัวแปรสุ่ม X_i ซึ่งมีปริภูมิพารามิเตอร์คือ $S = \{(k,\beta) : k \geq 0, \beta \geq 0\}$ ดังนั้น เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงสามารถสร้างขึ้นได้ ซึ่งจะเป็นค่าของ (k,β) และจะเป็นสับเซตของ S ที่ขึ้นกับสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ เมื่อ k ถูกกำหนดเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ค่าของ β ก็คือ

$$\beta \in \bigcap_{1\le i\le n}\left(\frac{\Gamma_k\left(\max\left\{\frac{i}{n}-d_{\alpha,n},0\right\}\right)}{X_{(i)}},\frac{\Gamma_k\left(\min\left\{\frac{i-1}{n}+d_{\alpha,n},1\right\}\right)}{X_{(i)}}\right)$$

เมื่อ $$L(k)=\max_{1\le i\le n}\frac{\Gamma_k\left(\max\left\{\frac{i}{n}-d_{\alpha,n},0\right\}\right)}{X(i)},\quad U(k)=\min_{1\le i\le n}\frac{\Gamma_k\left(\min\left\{\frac{i-1}{n}+d_{\alpha,n},1\right\}\right)}{X_{(i)}}$$

แล้วเซตความเชื่อมั่นจะประกอบด้วยค่าของ k ที่ทำให้ $L(k)\le U(k)$ ซึ่ง $\beta\in\left[L(k),U(k)\right]$ ของค่า k เหล่านี้ นอกจากการบ่งบอกว่าเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงมีขอบเขตใน β แล้ว ยังสามารถบอกขอบเขตบนของพารามิเตอร์ k ได้ โดยพิจารณา $i_1<i_2$ และข้อมูล $X_{(i_1)}<X_{(i_2)}$ โดยที่ $0<\frac{i_1}{n}-d_{\alpha,n}$ และ $\frac{i_2-1}{n}+d_{\alpha,n}<1$ แล้วก็ยังมีค่าของ β ที่เป็นไปได้ (ภายใต้เงื่อนไข $L(k)\le U(k)$) ซึ่งมีความจำเป็นที่

$$\frac{\Gamma_k\left(\frac{i_1}{n}-d_{\alpha,n}\right)}{X_{(i_1)}}\le\frac{\Gamma_k\left(\frac{i_2-1}{n}-d_{\alpha,n}\right)}{X_{(i_2)}}$$

เนื่องจาก $\Gamma(k,1)$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ k และมีความแปรปรวนเท่ากับ k และเมื่อ k มีขนาดใหญ่จะมีแนวโน้มลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ จึงได้ว่า

$$\Gamma_k\left(\frac{i_1}{n}-d_{\alpha,n}\right)\approx k+c_1\sqrt{k}\qquad \text{และ}\qquad \Gamma_k\left(\frac{i_2-1}{n}+d_{\alpha,n}\right)\approx k+c_2\sqrt{k}$$

สำหรับ k มีขนาดใหญ่ ส่วนควอนไทล์ c_1 และ c_2 มาจากการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน โดยที่ $c_1=z_{\frac{i_1}{n}-d_{\alpha,n}}$ และ $c_2=z_{\frac{i_2-1}{n}+d_{\alpha,n}}$ ดังนั้นจึงจำเป็นที่

$$\frac{k+c_1\sqrt{k}}{X_{(i_1)}}\le\frac{k+c_2\sqrt{k}}{X_{(i_2)}},$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ในรูป $\frac{k+c_1\sqrt{k}}{k+c_2\sqrt{k}}\le\frac{X_{(i_1)}}{X_{(i_2)}}<1$ สังเกตได้ว่า เมื่อ k ยิ่งมีขนาดใหญ่ จะทำให้ค่าด้านซ้ายมือยิ่งเข้าใกล้ 1 และจะไม่มีค่าที่เป็นไปได้ของ β ดังนั้น การหาเซตความเชื่อมั่นจะสามารถหาขอบเขตสำหรับค่า k ได้

การสร้างแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง

ให้ $p\in(0,1)$ และ x_p แทนฟังก์ชันควอนไทล์ที่ p ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ x_p ก็คือ

$$\min_{(k,\beta)\in C_\alpha}F^{-1}\left(p;k,\beta\right)\le x_p\le\max_{(k,\beta)\in C_\alpha}F^{-1}\left(p;k,\beta\right)$$

การหาค่า $\min_{(k,\beta)\in C_\alpha} F^{-1}\left(p;k,\beta\right)$ และ $\max_{(k,\beta)\in C_\alpha} F^{-1}\left(p;k,\beta\right)$ จะสามารถหาค่าได้ในแบบ 1 มิติ (Hayter, A.J. and Kiatsupaibul, S., 2013) เพราะว่า ค่า k กำหนดเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง จาก $F(x;k,\beta)=F_k(\beta x)$ จะได้

$$g_k(\beta)=F^{-1}\left(p;k,\beta\right)=\frac{\Gamma_k\left(p\right)}{\beta}$$

ฉะนั้น ที่แต่ละค่าของพารามิเตอร์ k , $g_k(\beta)$ ก็คือค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ $L(k)$ และ $U(k)$ ตามลำดับ ขอบเขตความเชื่อมั่นของ x_p จึงเปลี่ยนรูปเป็นดังนี้

$$\min_{(k,\beta)\in C_\alpha} F^{-1}\left(p;k,\beta\right)=\min_{k\ni L(k)\le U(k)}\frac{\Gamma_k(p)}{U(k)},\ \text{และ}\ \max_{(k,\beta)\in C_\alpha} F^{-1}\left(p;k,\beta\right)=\max_{k\ni L(k)\le U(k)}\frac{\Gamma_k(p)}{L(k)}$$

ดังนั้น การสร้างแถบความเชื่อมั่นที่แท้จริงของตัวแบบแกมมา จะหาได้โดยการหาช่วงความเชื่อมั่นของ x_p เมื่อ $0<p<1$

การสร้างเซตและแถบความเชื่อมั่นแบบลู่เข้า

วิธีนี้ถูกนำเสนอโดย Cheng, R.C.H. และ Iles, T.C. (1983) ได้นำเสนอวิธีมาตรฐานในการสร้างเซตความเชื่อมั่นแบบ 2 พารามิเตอร์พร้อมกัน ด้วยการใช้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบลู่เข้า ที่ขึ้นกับการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งสามารถนำไปใช้กับการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ θ ได้ โดยให้เวกเตอร์ของตัวประมาณพารามิเตอร์ θ แบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด คือ $\hat{\theta}$ เมื่อ $\hat{\theta}$ มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรแบบลู่เข้า ด้วยค่าเฉลี่ย θ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมคือ $\left(I\left(\theta\right)\right)^{-1}$ เมื่อ $I\left(\theta\right)$ คือเมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ นั่นคือ

$$Q(\theta)=\left(\hat{\theta}-\theta\right)^T I\left(\hat{\theta}-\theta\right)$$

ซึ่งเป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์แบบลู่เข้าด้วยระดับองศาความเสรีเท่ากับ v

ดังนั้น สำหรับตัวแบบแกมมาแบบ 2 พารามิเตอร์ จะได้

$$Q(k,\beta)=a\left(\hat{k}-k\right)^2+2b\left(\hat{k}-k\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)+d\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2$$

ที่ระดับความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สามารถหาขอบเขตของเซตความเชื่อมั่นแบบลู่เข้าที่เป็นรูปวงรี ได้จาก $Q(k,\beta)=\chi^2_{\alpha,2}$ เมื่อ k กำหนดเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง จะได้ขอบเขตของ β สำหรับขอบเขตของพารามิเตอร์ k ที่คือ $k_{\min},k_{\max}$ ก็คือค่า k ที่ทำให้ $\beta_{\min}=\beta_{\max}$

การวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์

ในการประมาณความเชื่อมั่นจะขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นที่ช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะคลอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง โดยถ้าพบว่าความน่าจะเป็นของการคลอบคลุมมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด แสดงว่าช่วงที่สร้างขึ้นมีความเชื่อมั่นตามที่กำหนด โดยทำการจำลองข้อมูลจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด แทนด้วย θ เป็นจำนวน r รอบ เมื่อให้ t_i แทน การเกิดเหตุการณ์ที่ช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะมีค่าพารามิเตอร์ θ ตกอยู่ในรอบการจำลองที่ i โดยถ้า

$t_i=1$ แสดงว่าช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะมีค่าพารามิเตอร์ θ ตกอยู่ในรอบการจำลองที่ i

$t_i=0$ แสดงว่าช่วงของเซตหรือแถบความเชื่อมั่นจะไม่มีค่าพารามิเตอร์ θ ตกอยู่ในรอบการจำลองที่ i

ดังนั้น $c=\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{r}$ คือความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์

วิธีการวิจัย

เริ่มจากการศึกษาความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีแบบลู่เข้า ซึ่งวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม R โดยจำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงแกมมาตามขอบเขตการวิจัย ดังตารางที่ 1 จากนั้นนำข้อมูลจากการจำลองเหล่านี้มาหาเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่น ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีแบบลู่เข้า จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นของตัวแบบแกมมา ที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีแบบลู่เข้า โดยจะเริ่มจากการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่น ที่ได้จากวิธีที่แท้จริงจำนวน 1000 รอบ ซึ่งในแต่รอบจะทำการสุ่มข้อมูลชุดใหม่ทุกครั้ง โดยกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ k และ β คงที่ และใน 1 รอบจะทำการวัดทั้งเซตและแถบไปพร้อมๆกัน ซึ่งในแต่ละรอบจะมีหลักการวัดเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง คือจะพิจารณาว่าค่าพารามิเตอร์ k ที่กำหนดไว้คงที่ อยู่ในช่วงของค่าพารามิเตอร์ k ที่หาได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงหรือไม่ หากพบว่าไม่อยู่ในช่วงนั้นจะให้ค่าวัดรอบนั้นเท่ากับ 0 แต่หากพบว่าอยู่ในช่วงนั้น จะมาพิจารณาต่อว่า ค่าพารามิเตอร์ β ที่กำหนดไว้คงที่ อยู่ในช่วงของค่าพารามิเตอร์ β ที่หาได้จากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงหรือไม่ หากพบว่าไม่อยู่ในช่วงนั้นจะให้ค่าวัดรอบนั้นเท่ากับ 0 แต่หากพบว่าอยู่ในช่วงนั้น จะให้ค่าวัดรอบนั้นเท่ากับ 1 ส่วนหลักการในการวัดแถบความเชื่อมั่นจากเซตความเชื่อมั่นที่แท้จริงนี้ จะพิจารณาจากการหาควอนไทล์ของชุดข้อมูลจริง คือที่ทราบค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดไว้แล้ว ณ ควอนไทล์ที่ p เมื่อ p เริ่มต้นที่ 0.05 และเพิ่มค่า p ทีละ 0.05 จนกระทั่งสิ้นสุดที่ค่า p เท่ากับ 0.95 โดยจะทำการพิจารณาว่าควอนไทล์ของชุดข้อมูลจริงอยู่ในขอบเขตที่ต่ำสุดและขอบเขตที่สูงสุดของควอนไทล์ที่ p หรือไม่ ซึ่งจะต้องทำการเปรียบเทียบทั้งหมด 19 ค่าต่อ 1 รอบ หลังจากการวัดค่าในแต่ละรอบจนครบ 1000 รอบเสร็จสิ้นแล้ว ก็จะทำการหาค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริง จากนั้นก็จะทำการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่น ที่ได้จากวิธีแบบลู่เข้าจำนวน 1000 รอบ ซึ่งมีหลักการวัดเช่นเดียวกับการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงที่กล่าวไปข้างต้น จากนั้นทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด เพื่อพิจารณาว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตและแถบที่ได้จากทั้งสองวิธี เท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดหรือไม่ และยังทำการเปรียบเทียบว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากทั้งสองวิธี ว่ามีค่ามากหรือน้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดอยู่เท่าใด โดยพิจารณาในรูปเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงที่แสดงไว้ในลำดับต่อไป

ผลการวิจัย

เซตความเชื่อมั่นและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้า

จากการศึกษาเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีแบบลู่เข้า ในที่นี้จะแสดงผลเป็นรูปเซตความเชื่อมั่น(แกนนอนคือ β แกนตั้งคือ k) และรูปแถบความเชื่อมั่น(แกนนอนคือ x แกนตั้งคือ $F(x)$) ของวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้า ดังตารางที่ 2

ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้จากเซตและแถบความเชื่อมั่นจากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้า

นำค่าเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้ามาวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์จำนวน 1000 รอบ โดยกำหนดให้ใช้สัญลักษณ์

c_set แทนความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตความเชื่อมั่น

c_band แทนความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของแถบความเชื่อมั่น

ซึ่งแสดงผลการวัดความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์เหล่านี้ไว้ในตารางที่ 3 และเมื่อนำความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้มาทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยทำการทดสอบสมมติฐาน ดังต่อไปนี้

$$H_0 : p = p_0$$
$$H_1 : p \neq p_0$$

เมื่อกำหนดให้ p คือ ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตหรือแถบที่วัดได้, p_0 คือ ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด และใช้สถิติทดสอบ $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ โดยพิจารณาผลจากค่า p-value ดังตารางที่ 3 ซึ่งหากพบระดับนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 หรือ 0.01 แสดงว่า c_set หรือ c_band นั้นไม่เท่ากับความเชื่อมั่นที่กำหนด คือ 0.95 หรือ 0.99

นอกจากนี้ทำการเปรียบเทียบเพื่อบอกว่าว่า c_set หรือ c_band นั้นมีค่ามากหรือน้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่าใด ซึ่งให้ผลดังตารางที่ 4 โดยจะพิจารณาในรูปของเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$\%\Delta c = \left(\frac{\sum_{j=1}^{m} c_j}{m(1-\alpha)} \times 100 \right) - 100$$

กำหนดให้ $\%\Delta c$ คือ เปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลง

$\sum_{j=1}^{m} c_j$ คือ ผลรวมของค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบ

$1-\alpha$ คือระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

m คือจำนวนของค่า ความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ของเซตหรือแถบ ในที่นี้ $m = 6$ เพราะจะคำนวณเฉพาะกรณีที่ n=30 และ n=100 เนื่องจาก ที่ n=10 ในวิธีแบบลู่เข้าไม่สามารถให้ค่าเซตและแถบได้

โดย เครื่องหมายลบ (–) คือ c_set หรือ c_band ต่ำกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด
เครื่องหมายบวก (+) คือ c_set หรือ c_band สูงกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด

การอภิปรายผล

จากผลการศึกษาพบว่าเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริง สามารถคำนวณได้โดยอาศัยคุณสมบัติของการแจกแจงแบบแกมมา และเป็นวิธีที่ง่ายต่อการนำไปใช้ โดยเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีลู่เข้า จะพบว่าเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริง จะสามารถหาได้ทุกขนาดตัวอย่าง แต่เซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแบบลู่เข้าจะไม่สามารถหาค่าได้ที่ขนาดตัวอย่างน้อย(n=10) เนื่องจาก เซตความเชื่อมั่นแบบลู่เข้าจะได้ค่าคลอบคลุมแกน k=0 ซึ่งส่งผลให้ไม่เข้าเงื่อนไขของเซตความเชื่อมั่น นอกจากนี้ยังพบว่า เซตความเชื่อมั่นที่แท้จริง มีลักษณะผอมและยาวกว่าเซตความเชื่อมั่นแบบลู่เข้า และจะล้อมรอบเซตความเชื่อมั่นแบบลู่เข้าที่ขนาดตัวอย่างมากขึ้น ซึ่งเซตความเชื่อมั่นแบบลู่เข้าจะมีขนาดเล็กกว่า แต่แถบความเชื่อมั่นที่ได้จากทั้งสองวิธีค่อนข้างคล้ายกัน แต่จะแตกต่างกันในช่วงหาง นั่นคือ ขนาดตัวอย่างจะมีผลทำให้การอนุมานจากวิธีที่แท้จริงแตกต่างจากวิธีแบบลู่เข้า และจากการเปรียบเทียบความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้า พบว่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริงส่วนใหญ่จะเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด 0.95 และ 0.99 สำหรับความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ของเซตและแถบที่ได้จากวิธีลู่เข้า ส่วนใหญ่จะเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด 0.99 เท่านั้น นั่นคือ ยิ่งระดับความเชื่อมั่นน้อยลง เซตและแถบที่ได้จากวิธีลู่เข้าจะมีการอนุมานด้วยอัตราความคลาดเคลื่อนที่มากกว่าเซตและแถบที่ได้จากวิธีแท้จริง หรือหากสรุปโดยภาพรวม จะพบว่า เซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงจะให้ค่าความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด มากกว่าเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีลู่เข้า ทั้งที่ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่ากับ 0.95 และ 0.99 โดยเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงส่วนใหญ่มีลักษณะความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ภายใต้ความเชื่อมั่นที่กำหนด (underestimate) แต่เซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีลู่เข้าส่วนใหญ่มีลักษณะความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์มากกว่าความเชื่อมั่นที่กำหนด (overestimate)

ข้อเสนอแนะ

เซตความเชื่อมั่นที่หาได้นี้ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับการหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าพารามิเตอร์แต่ละค่า ช่วงความเชื่อมั่นของฟังก์ชันของค่าพารามิเตอร์ เช่น ค่าคาดหวังหรือค่าเฉลี่ยของตัวแบบแกมมา เป็นต้น และยังสามารถนำวิธีการคำนวณของการอนุมานที่แท้จริงของตัวแบบแกมมานี้ ไปใช้ทดสอบว่าข้อมูลมาจากการแจกแจงแบบแกมมาหรือไม่ได้

เอกสารอ้างอิง

Cheng, R.C.H. and Iles, T.C. 1983. Confidence bands for cumulative distribution functions of continuous random variables. Technometrics 25: 77-86.

Hayter, A.J. and Kiatsupaibul, S. 2013. Exact Inferences for a Weibull Model. Quality Engineering.

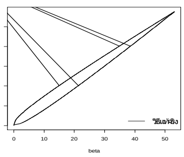
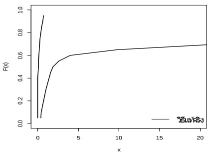
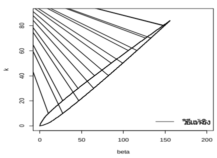
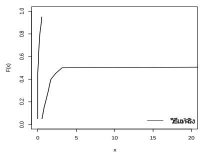
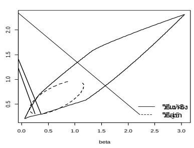
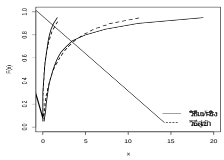
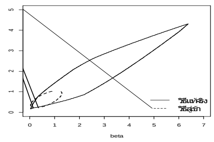
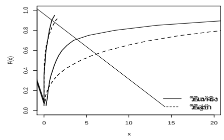
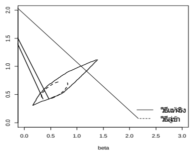
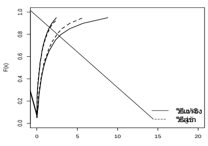
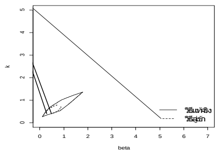
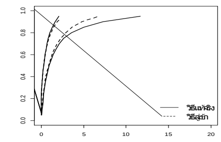
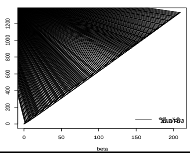
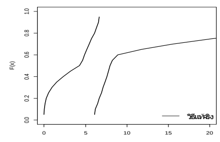
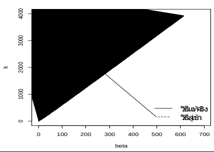
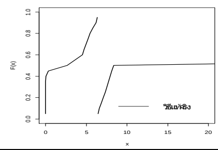
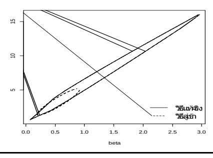
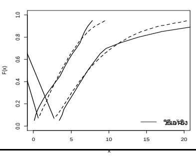
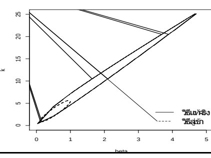
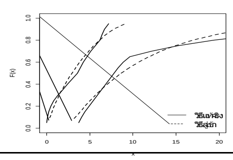
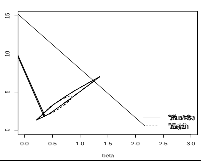
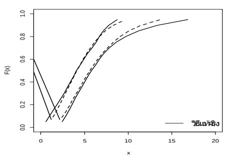
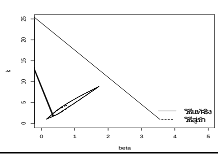
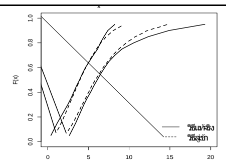
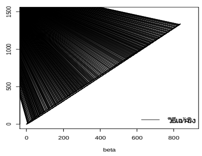
Hayter, A.J. and Kiatsupaibul, S. 2013. Exact Inferences for a Gamma distribution. Working paper.

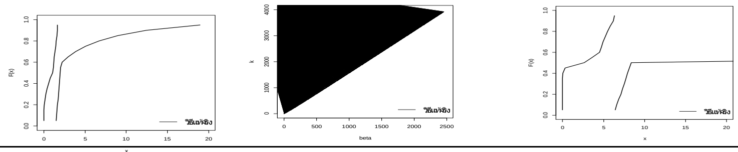
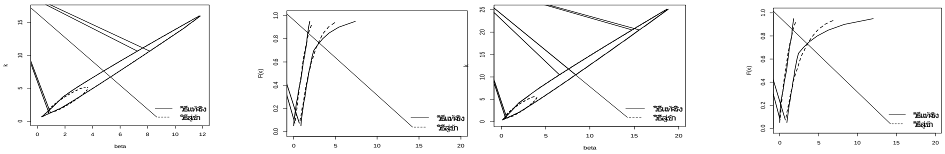
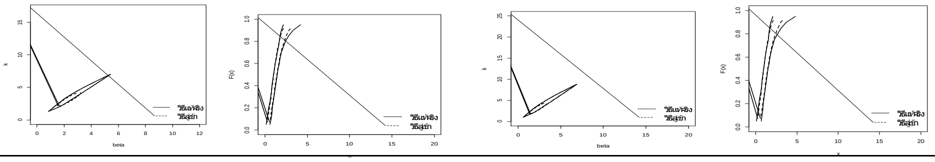
ตารางที่ 1 ขอบเขตการวิจัย

ขอบเขตการวิจัย	สัญลักษณ์	กำหนดขอบเขต
ค่าพารามิเตอร์	(k,β)	(0.5,0.5), (3,0.5), (3,2)
ขนาดตัวอย่าง	n	10, 30, 100
ระดับความเชื่อมั่น	$1-\alpha$	0.95, 0.99
จำนวนการทำซ้ำ	r	1000

ตารางที่ 2 รูปเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้าที่ระดับความเชื่อมั่น 0.95 และ 0.99

โดยกำหนดให้ —— วิธีแท้จริง ---- วีธีลู่เข้า

พารามิเตอร์	ขนาดตัวอย่าง	ระดับความเชื่อมั่น 0.95		ระดับความเชื่อมั่น 0.99	
		เซต	แถบ	เซต	แถบ
$k=0.5,$ $\beta=0.5$	n=10				
	n=30				
	n=100				
$k=3,$ $\beta=0.5$	n=10				
	n=30				
	n=100				
					

$k=3,$ $\beta=2$	n=10	
	n=30	
	n=100	

ตารางที่ 3 แสดงความเชื่อมั่นเชิงประจักษ์ที่วัดได้และการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดของเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้าที่ระดับความเชื่อมั่น 0.95 และ 0.99

ระดับความเชื่อมั่น	พารามิเตอร์	ขนาดตัวอย่าง	c_set (p-value)		c_band (p-value)	
			วิธีแท้จริง	วิธีลู่เข้า	วิธีแท้จริง	วิธีลู่เข้า
0.95	$k=0.5,$ $\beta=0.5$	n=10	0.948 (0.772)	–	0.945(0.469)	–
		n=30	0.934 (0.020)*	0.980(0.000)*	0.935(0.030)*	0.981(0.000)*
		n=100	0.833 (0.000)*	0.973(0.001)*	0.853(0.000)*	0.976(0.000)*
	$k=3,$ $\beta=0.5$	n=10	0.958 (0.246)	–	0.952(0.772)	–
		n=30	0.955 (0.469)	0.960(0.147)	0.958(0.246)	0.965(0.030)*
		n=100	0.957 (0.310)	0.972(0.001)*	0.958(0.246)	0.978(0.000)*
	$k=3,$ $\beta=2$	n=10	0.958 (0.246)	–	0.952(0.772)	–
		n=30	0.955 (0.469)	0.963(0.059)	0.958(0.246)	0.967(0.014)*
		n=100	0.957 (0.310)	0.973(0.001)*	0.958(0.246)	0.977(0.000)*
0.99	$k=0.5,$ $\beta=0.5$	n=10	0.990 (1.000)	–	0.981(0.004)**	–
		n=30	0.985 (0.112)	0.990(1.000)	0.987(0.340)	0.991(0.751)
		n=100	0.988 (0.525)	0.995(0.112)	0.991(0.751)	0.996(0.057)
	$k=3,$ $\beta=0.5$	n=10	0.994 (0.204)	–	0.991(0.751)	–
		n=30	0.987 (0.340)	0.990(1.000)	0.987(0.340)	0.994(0.204)
		n=100	0.994 (0.204)	0.993(0.340)	0.996(0.057)	0.997(0.030)
	$k=3,$ $\beta=2$	n=10	0.994 (0.204)	–	0.991(0.751)	–
		n=30	0.987 (0.340)	0.991(0.751)	0.987(0.340)	0.995(0.112)
		n=100	0.994 (0.204)	0.993(0.340)	0.996(0.057)	0.996(0.057)

*, ** คือการทดสอบมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.01 ตามลำดับ

ตารางที่ 4 แสดงเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงของเซตและแถบความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธีแท้จริงและวิธีลู่เข้าที่ระดับความเชื่อมั่น 0.95 และ 0.99

ความเชื่อมั่นที่กำหนด	$\%\Delta c$ ของเซตความเชื่อมั่น		$\%\Delta c$ ของแถบความเชื่อมั่น	
	วิธีแท้จริง	วิธีลู่เข้า	วิธีแท้จริง	วิธีลู่เข้า
0.95	-1.9123	+2.1228	-1.4035	+2.5263
0.99	-0.0842	+0.2020	+0.0673	+0.4882