การปรับแก้อัตโนมัติของอัตรามรณะด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์

Automated Graduation of Mortality Rates Using Bayesian Trans-dimensional Models

ฐาปนี ปะจันระ[1*] และ สุวาณี สุรเสียงสังข์[2]

Thapanee Pachanra and Suwanee Surasiengsunk

[1]นักศึกษาปริญญาโท สาขาวิชาการประกันภัย ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย [2]รองศาสตราจารย์ ดร. คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Abstract

This paper presents a new method of the parametric graduation of mortality rate which uses Bayesian Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo methods. The new method can be seen as an automatic graduation method which this graduation method deals satisfactorily with the data in each case, without the need for any intervention from the graduator. For comparison, we also apply graduation using generalized linear models to the same mortality rates. Mortality data using in this study are life insured mortality rates, Thai populations mortality rates and mortality rates from Monte Carlo simulation. The suitable graduation methods were chosen by considering the smallest value of the mean absolute percent error (MAPE). The results of the study show that the MAPE of graduation using generalized linear models are smaller than those of graduation using Bayesian trans-dimensional models. However, automated graduation using Bayesian trans-dimensional models can be adjusted the mortality rate to the law of mortality.

Keyword : *Graduation, Mortality Rate, Bayesian, Trans-dimensional model*

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้เป็นการนำเสนอวิธีการปรับแก้อัตรามรณะแบบใช้พารามิเตอร์วิธีใหม่ที่นำเอาหลักการBayesian Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo ซึ่งวิธีการปรับแก้นี้สามารถให้ค่าปรับแก้ที่เหมาะสม โดยไม่ต้องปรับแก้เพิ่มจึงเรียกได้ว่าเป็นการปรับแก้อัตโนมัติ สำหรับการเปรียบเทียบได้ใช้วิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไปกับข้อมูลอัตรามรณะชุดเดียวกัน อัตรามรณะที่ใช้ในการวิจัยนี้ประกอบด้วยอัตรามรณะของผู้เอาประกันชีวิต อัตรามรณะของประชากรไทย และอัตรามรณะจากการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล การเลือกวิธีการปรับแก้ที่เหมาะสมพิจารณาจากค่าเฉลี่ยร้อยละความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (MAPE) ที่มีค่าน้อยสุด การศึกษาพบว่าวิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไปให้ค่า MAPE ต่ำกว่าวิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์ แต่อย่างไรก็ตามวิธีการปรับแก้ที่ใช้ตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์นั้นสามารถใช้ปรับอัตรามรณะที่ได้ให้เป็นไปตามกฎของอัตรามรณะได้

คำสำคัญ : *การปรับแก้, อัตรามรณะ, เบย์เซียน, ตัวแบบเปลี่ยนมิติ*

บทนำ

ตารางมรณะ (Mortality Table) เป็นปัจจัยสำคัญทางการประกันชีวิตอย่างมาก เนื่องจากอัตรามรณะนั้นต้องนำไปใช้ในการคำนวณอัตราเบี้ยประกันภัย เงินสำรอง มูลค่าที่ริบไม่ได้ รวมทั้งใช้ในการวิเคราะห์สินทรัพย์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ต้องคำนวณให้เหมาะสมที่สุดเพื่อครอบคลุมถึงความรับผิดชอบต่างๆ และผลประโยชน์ของบริษัทประกันชีวิตที่จะได้รับ ดังนั้นอัตรามรณะที่จะนำไปใช้นั้นควรสะท้อนและใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด

การปรับแก้ (Graduation) นั้นไม่ใช่เพียงแค่ทำให้ราบเรียบ แต่เป็นการประมาณอัตราให้เป็นจริงสำหรับกลุ่มประชากรที่ศึกษา (Kimeldorf, 1967) เมื่อพิจารณาการปรับแก้อัตรามรณะ สามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ได้แก่ การปรับแก้แบบใช้พารามิเตอร์ และการปรับแก้แบบไม่ใช้พารามิเตอร์

ในอดีตที่ผ่านมาได้มีนักวิจัยหลายท่านได้เสนอวิธีการของเบย์เซียนมาใช้ในการประมาณค่าเพื่อหาค่าปรับแก้อัตรามรณะ เช่น Kimeldorf และ Jones (1967), Forfar และคณะ (1988), Broffit (1988) sและ Carlin (1992)

ดังนั้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาการปรับแก้อัตรามรณะวิธีใหม่กับอัตรามรณะของประเทศไทย คือ วิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์ ซึ่งสามารถนำมาใช้ได้กับข้อมูลที่มีขอบเขตกว้าง โดยไม่ต้องพิจารณาหลายขั้นตอนรวมทั้งให้ค่าปรับแก้ที่มีความเหมาะสม (Verrall และ Haberman, 2011)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการปรับแก้อัตรามรณะทั้ง 2 วิธี คือ

ก. วิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไป
(Graduation using Generalized Linear Models : GLMs)

ข. วิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์
(Automated Graduation using Bayesian Trans-dimensional Models)

แนวคิด ทฤษฎี กรอบแนวคิด

กำหนดให้

x แทน อายุ

d_x แทน จำนวนคนที่เสียชีวิตในช่วงอายุ (x, x+1)

E_x แทน จำนวนกรมธรรม์ที่ร่วมเสี่ยงภัย (Exposure) ในช่วงอายุ (x, x+1)

วิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไป

(Graduation using Generalized Linear Models : GLMs) (Renshaw, A. 1991)

ฟังก์ชันสำหรับข้อมูลอัตรามรณะ ในรูปทั่วไปของตัวแบบ Gompertz - Makeham (GM) ที่ลำดับ (r,s) คือ

$$GM^{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i x^{i-1} + \exp\left(\sum_{j=r+1}^{r+s} \beta_j x^{j-r-1} \right) \tag{1}$$

ในที่นี้ ตัวพยากรณ์ (η_x) เป็นฟังก์ชันที่ได้จาก $GM^{r,s}(x)$ นั่นคือ

$$\eta_x = GM^{r,s}(x) \tag{2}$$

ดังนั้น Logit Gompertz - Makeham ที่ลำดับ (r,s) คือ

$$LGM^{r,s}(x) = \frac{GM^{r,s}(x)}{1 + GM^{r,s}(x)} \tag{3}$$

จากนั้นใช้ Generalized linear model (GLM) เพื่อปรับแก้อัตรามรณะ (q_x)
ภายใต้สมมติฐาน ดังนี้คือ

ให้ d_x แต่ละตัวเป็นอิสระต่อกันและมีแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution) ที่มีค่าเฉลี่ย $E_x \cdot q_x$

โดยกำหนดให้

$$q_x = LGM^{r,s}(x) = \frac{GM^{r,s}(x)}{1 + GM^{r,s}(x)} \tag{4}$$

หรือ

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = GM^{r,s}(x) \tag{5}$$

เมื่อ r = 0 แล้วสมการ (5) จะลดรูปเหลือเป็น

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = GM^{0,s}(x) \tag{6}$$

หรือ

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = \exp\left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j x^{j-1} \right) \tag{7}$$

โดยพิจารณาที่ s = 2, . . . , 12 (Deb´on, A., Montes, F., and Sala, R., 2005)

จากสมการ (7) และใช้ฟังก์ชันโลจิทเป็นฟังก์ชันเชื่อมโยงสำหรับ binomial family เพื่อประมาณหาค่าพารามิเตอร์ ($\hat{\beta}_j$) ด้วยวิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

เมื่อ $\eta_x = \log\left(\frac{q_x}{1-q_x}\right)$ คือ ฟังก์ชันเชื่อมโยงโลจิท (logit link function) ของ q_x

ดังนั้น จะได้ค่า จากตัวแบบ LGM(0, s) ที่ r = 0 และ s = 2, . . . , 12 ที่สามารถนำไปใช้ในการหาค่าปรับแก้ต่อไป

ในที่นี้ จะได้ค่าปรับแก้อัตรามรณะ $q'_x = \frac{\exp\left(\hat{\eta}_x\right)}{1+\exp\left(\hat{\eta}_x\right)}$ (8)

เมื่อ $\hat{\eta}_x = \sum_{j=1}^{s} \hat{\beta}_j x^j$ คือ ตัวพยากรณ์พหุนามที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ (estimated polynomial predictors)

วิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์

(Automated Graduation using Bayesian Trans-dimensional Models : BTMs)

วิธีการปรับแก้นี้พัฒนาโดย R.J. Verrall และ S. Haberman (Verrall และ Haberman, 2011) เป็นวิธีการปรับแก้แบบใช้พารามิเตอร์วิธีหนึ่งที่นำเอาหลักการของเบย์มาใช้ร่วมด้วย

กำหนดฟังก์ชันสำหรับพลังของการมรณะในรูปทั่วไปของตัวแบบ Gompertz – Makeham (GM) ที่ลำดับ (r,s) โดยพิจารณาที่ $s \geq 2$ คือ

$$GM^{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i x^{i-1} + \exp\left(\sum_{j=r+1}^{r+s} \beta_j x^{j-r-1}\right) \quad (9)$$

เนื่องจาก (9) มีพจน์ที่ x^i เช่น x^4 = 100,000,000 เมื่อ อายุ = 100 ซึ่งอาจทำให้ค่าพารามิเตอร์มีค่าน้อยเกินไป ในการคำนวณจึงเปลี่ยนใช้ฟังก์ชัน Chebycheff Polynomials แทน $\{1, x, x^2, \ldots\}$ และจากแทน x ในสมการ เปลี่ยนเป็น $\frac{x-u}{v}$ ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง [-1, 1]

หรือสามารถเขียนใหม่

$$GM^{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i C_{i-1}\left(\frac{x-u}{v}\right) + \exp\left(\sum_{j=r+1}^{r+s} \beta_j C_{j-r-1}\left(\frac{x-u}{v}\right)\right) \quad (10)$$

โดยที่ พารามิเตอร์ β_i สำหรับ i = 1, …, r + s

$u = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$, $v = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$

$C_i(y)$ = ฟังก์ชัน Chebycheff Polynomials

เมื่อ $C_0(y)=1, C_1(y)=y ,... , C_{n+1}(y)=2yC_n(y)-C_{n-1}(y)\,;\; n\geq 1$

โดยกำหนดสมมติฐาน ดังนี้คือ

ให้ d_x แต่ละตัวเป็นอิสระต่อกันและมีแจกแจงแบบปัวซง (Poisson Distribution) ที่มีค่าเฉลี่ย $E_x\mu_x$ เมื่อ $\mu_x = GM^{r,s}(x)$

จากสมการ (10) พบว่าจะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนที่หนึ่ง $\sum_{i=1}^{r}\beta_i C_{i-1}\left(\frac{x-u}{v}\right)$ ซึ่งส่วนนี้ ต้องระวังเพราะอาจให้ค่าที่เป็นลบได้ และส่วนที่สอง คือ $\exp\left(\sum_{j=r+1}^{r+s}\beta_j C_{j-r-1}\left(\frac{x-u}{v}\right)\right)$ เป็นส่วนที่ทำให้ได้เส้นโค้งที่เป็นไปตามกฎของการตาย ดังนั้น ค่า r ไม่ควรเกิน 3 เพราะจะทำให้เส้นโค้งที่ได้ไม่สอดคล้องกับกฎดังกล่าว

ถึงแม้ว่า จุดมุ่งหมายของวิธีการนี้ คือ การปรับแก้อัตรามรณะในช่วงอายุของผู้ใหญ่ แต่เพื่อให้ตัวครอบคลุมทุกช่วงอายุและข้อจำกัดเกี่ยวตัวแบบ $GM^{r,s}(x)$ จึงพิจารณาที่ r = 3 และ s = 6

$$GM^{3,6}(x) = \sum_{i=1}^{3}\beta_i C_{i-1}\left(\frac{x-u}{v}\right)+\exp\left(\sum_{j=4}^{9}\beta_j C_{j-4}\left(\frac{x-u}{v}\right)\right) \tag{11}$$

จากนั้นใช้ตัวแบบเปลี่ยนมิติเพื่อหาค่าประมาณพารามิเตอร์โดยอาศัยกระบวนการของเบย์เซียนกับตัวแบบดังสมการ (11) โดยสมมติให้ค่าพารามิเตอร์ที่ได้มาเหล่านั้นเป็นความน่าจะเป็นก่อนการทดลอง เพื่อประมาณหาความน่าจะเป็นหลังการทดลองสำหรับแต่ละตัวแบบซึ่งคำนวณด้วยวิธี Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC) แล้วคำนวณหาค่าปรับแก้ของพลังของการมรณะ (μ'_x) ด้วยวิธีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักสำหรับทุกตัวแบบ โดยใช้ความน่าจะเป็นหลังการทดลองของงแต่ละตัวแบบเป็นค่าถ่วงน้ำหนัก

จะได้ว่า

$$\mu'_x = \sum_{i=1}^{3}\hat{\beta}_i C_{i-1}\left(\frac{x-u}{v}\right)+\exp\left(\sum_{j=4}^{9}\hat{\beta}_j C_{j-4}\left(\frac{x-u}{v}\right)\right) \tag{12}$$

จากนั้น คำนวณหาอัตรามรณะที่ปรับแก้แล้ว จาก $q'_x = 1 - \exp(\mu'_x)$ (13)

วิธีการดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาและค้นคว้าเอกสาร ตำรา งานวิจัย รวมถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาหลักการและวิธีการคำนวณหาค่าปรับแก้โดย วิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไป และวิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์

3. เก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ จำนวนกรมธรรม์ที่ร่วมเสี่ยงภัย, จำนวนรายที่มรณกรรมของผู้เอาประกันชีวิตประสบการณ์ปี พ.ศ. 2538 – 2540 และจำนวนประชากรไทย, จำนวนการตายของประชากรไทย ในช่วงปี พ.ศ.2550 – 2552
4. จำลองข้อมูลตามสถานการณ์ โดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล
5. หาอัตรามรณะของข้อมูลทั้งจากข้อมูลตัวอย่างและข้อมูลจำลอง
6. ทำการปรับแก้อัตรามรณะที่ได้จากข้อ 5 โดยใช้ทั้ง 2 วิธีตามข้อ 2
7. คำนวณค่า MAPE และเปรียบเทียบโดยค่าเพื่อหาวิธีที่มีค่า MAPE น้อยที่สุด
8. วิเคราะห์และสังเคราะห์ผลที่ได้
9. เขียนรายงาน สรุปผลการวิจัย และนำเสนอผลการวิจัย

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

เมื่อเปรียบเทียบค่า MAPE จากอัตรามรณะที่ปรับแก้จากทั้งสองวิธี พบว่า ค่า MAPE จากวิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไปมีค่าต่ำกว่าวิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์
แต่ต่างกันไม่มาก ดังแสดงในตารางที่ 1

เราจึงควรพิจารณาในแง่การนำไปใช้ คือ ความซับซ้อนของวิธีทำในแต่ละวิธี ซึ่งวิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไป ในแต่ละข้อมูลที่ต้องการปรับแก้ จะต้องพิจารณาหาตัวแบบที่เหมาะสมจาก 11 ตัวแบบ ซึ่งยุ่งยากและใช้เวลานานกว่าวิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์ เพราะวิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์นั้น ไม่ต้องทำการคัดเลือกตัวแบบ เนื่องจากในกระบวนการของวิธีดังกล่าว พิจารณาจากตัวแบบที่คาดว่าครอบคลุมที่สุดกับทั้งช่วงอายุและทำให้ค่าที่ได้เป็นไปตามกฎของอัตรามรณะ(Heligman และ Pollard, 1980) เช่น ข้อมูลจากผู้เอาประกัน เพศชาย วิธีการดังกล่าวสามารถปรับให้อัตรามรณะที่ได้เป็นไปตามกฎของอัตรามรณะ ดังแสดงในรูปที่ 1 ถึงแม้ว่าวิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์ จะมีความซับซ้อนของทฤษฎีมากกว่า แต่ยังมีตัวอย่าง code ที่ผู้วิจัยสามารถนำมาดัดแปลงใช้กับข้อมูลที่ต้องการปรับแก้ได้ จึงไม่ยาก

เอกสารอ้างอิง

Broffit, J.D. 1988. Increasing and increasing convex Bayesian graduation. Transactions of Society of Actuaries. 40: 115–148.

Carlin, B.P. 1992. A simple Monte Carlo approach to Bayesian graduation. Transactions of Society of Actuaries. 44: 55–76.

Deb´on, A., Montes, F., and Sala, R. 2005. A comparison of parametric models for mortality graduation. Application to mortality data for the Valencia Region (Spain). SORT. 29(2): 269-288

Forfar, D.O., McCutcheon, J.J. and Wilkie, A.D. 1988. On Graduation by Mathematical Formula. Journal of the Institute of Actuaries. 115: 1–149.

Heligman, L. and Pollard, J.H. 1980. The Age Pattern of Mortality. Journal of the Institute of Actuaries. 107: 49–80.

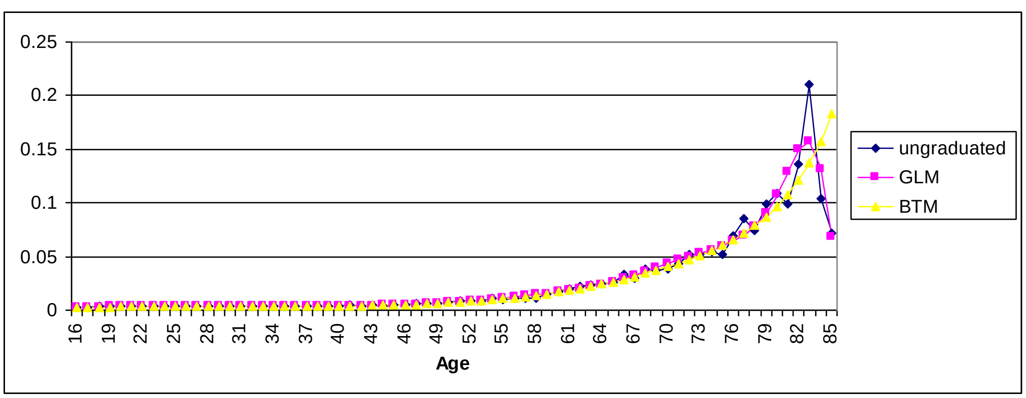
Kimeldorf, G.S. and Jones, D.A. 1967. Bayesian graduation. Transactions of the Society of Actuaries. 19: 66–112.

Renshaw, A. 1991. Actuarial graduation practice and generalized linear models. Journal of the Institute of Actuaries. 118: 295-312.

Verrall, R.J.and Haberman, S. 2011. Automated Graduation using Bayesian Trans-dimensional Models, Annals of Actuarial Science. 5(2): 231–251.

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบค่า MAPE ที่ได้จากวิธีการปรับแก้ทั้ง 2 วิธี โดยจำแนกตามข้อมูล และ เพศ

ข้อมูล	เพศ	MAPE	
		GLM	BTM
ประชากรไทย	ชาย	1.615539765	2.288447583
	หญิง	2.738958675	2.914059263
ผู้เอาประกันชีวิต	ชาย	8.19803847	9.801336021
	หญิง	12.17996617	12.51663253



รูปที่ 1 **แสดงอัตรามรณะก่อนปรับแก้ และอัตรามรณะที่ปรับแก้แล้วโดยวิธีการปรับแก้ด้วยตัวแบบเชิงเส้นทั่วไปและวิธีการปรับแก้อัตโนมัติด้วยตัวแบบเปลี่ยนมิติของเบย์ ของข้อมูลผู้เอาประกันชีวิตประสบการณ์ปี พ.ศ. 2538 – 2540 เพศชาย**