ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ

Mathematical Model for the Tuberculosis Transmission of Prisoners

สมฤดี เมฆฉาย[1], สุรพล เนาวรัตน์[2], และนรินทร์ สุขกรี[3]

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อสร้างและวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ วิเคราะห์ตัวแบบโดยวิธีมาตรฐาน คือศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลโดยหาคำตอบเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลขของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ เขียนในรูประบบสมการเชิงอนุพันธ์ 4 สมการ ประกอบด้วยกลุ่มคนที่ไวต่อโรค กลุ่มคนที่มีเชื้อแฝงกลุ่มคนที่ติดโรค และกลุ่มคนที่มีภูมิคุ้มกัน และการวิเคราะห์ตัวแบบได้จุดสมดุล 2 จุด คือจุดสมดุลที่ไม่มีโรค มีค่าระดับการติดเชื้อของโรค $(\Re_0)$ เท่ากับ 0.03598 และจุดสมดุลที่มีโรค เมื่อพิจารณาอัตราของพื้นที่ต่อประชากร (A) เท่ากับ 60,65,65,65 ตารางเมตรตามลำดับ อัตราการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักของผู้ต้องขัง (ε) เท่ากับ $0.5, 0.5, 1, 0.52$ ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที ตามลำดับ ความเร็วของการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักของผู้ต้องขัง (v) เท่ากับ $0.05, 0.05, 0.05, 1$ เมตรต่อวินาที ตามลำดับ จะมีค่าระดับการติดเชื้อของโรค $(\Re_0)$ เท่ากับ 1.6132 , 1.3608 , 1.2782 และ 1.4562 ตามลำดับ นั่นคือพื้นที่ต่อประชากร อัตราการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักของผู้ต้องขัง และความเร็วของการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักของผู้ต้องขัง มีผลต่อการระบาดของวัณโรค

คำสำคัญ : ตัวแบบคณิตศาสตร์ , วัณโรค , เรือนจำ, จุดสมดุล, ค่าระดับการติดเชื้อของโรค

[1] บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี 84100 ประเทศไทย

[23] สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี 84100 ประเทศไทย

Abstract

The objectives of this research were to develop and analyze the mathematical model for the prisoners tuberculosis transmission. The standard method was used to determine equilibrium points , stability and the analytic solutions and numerical solutions. The research results found that the model was a non-linear differential equation system that consisted of four equations, which consisted of 4 compartments : susceptible, latently, infected and recovered .

Model analysis found that the model has two equilibrium points, disease free equilibrium and endemic equilibrium. The basic reproductive number at disease free state was at 0.03598 and at the endemic disease state was 1.6132 , 1.3608 , 1.2782 and 1.4562 by the considering the ratio of area per population (A) equal 60 , 65 , 65,65 cm^2 respectively, the air circulation rate in prisoners room (ε) equal $0.5, 0.5, 1, 0.52$ cm^3 respectively and the air circulation speed (v) equal $0.05, 0.05, 0.05, 1$ m/s , respectively. The ratio of area per population, the air circulation rate in prisoners room and the air circulation speed effected to the tuberculosis transmission. .

Keywords : Mathematical model , tuberculosis, prison, equilibrium points, Basic reproductive number

บทนำ

องค์การอนามัยโลก (World Health Organization : WHO) ได้ประกาศ ประเทศที่มีปัญหาด้านวัณโรคสูง (High Burden Country) จำนวน 22 ประเทศ และจัดให้ประเทศไทยอยู่อันดับที่ 18 โดยคาดการว่าจะมีผู้ป่วยวัณโรครายใหม่ประมาณ 92,300 คนในจำนวนนี้ประมาณ 44,400 คนเป็นผู้ป่วยระยะแพร่เชื้อ นอกจากนี้ยังพบว่าผู้ป่วยวัณโรครายใหม่ตรวจพบติดเอดส์ร่วมด้วย ประมาณร้อยละ 17 ซึ่งเป็นสาเหตุสำคัญในการเสียชีวิตของผู้ป่วย นอกจากการแพร่ระบาดของการติดเชื้อเอดส์จะเป็นปัจจัยหลักที่สำคัญที่ทำให้วัณโรคกลับมาเป็นปัญหาสาธารณสุขในประเทศไทยแล้วยังมีปัจจัยเกื้อหนุนอื่น ๆ ได้แก่ การเคลื่อนย้ายประชากรจาก

ชนบทเข้ามาทำงานในเขตเมืองใหญ่ แหล่งชุมชนแออัดของประชากรยากจน แรงงานย้ายถิ่นจากประเทศเพื่อนบ้านตามแนวชายแดน และผู้ต้องขังในเรือนจำ เป็นต้น วัณโรคเป็นโรคติดต่อที่กำลังเป็นปัญหาสำคัญด้านสาธารณสุข เป็นสาเหตุของการป่วยและการเสียชีวิตในหลาย ๆ ประเทศทั่วโลก สาเหตุที่ทำให้วัณโรคกลับมามีปัญหาใหม่ทั่วโลกเนื่องจากการแพร่ระบาดของโรคเอดส์ส่งผลให้การแพร่ระบาดของวัณโรคมีความรุนแรงเพิ่มมากขึ้น องค์การอนามัยโลก ได้ประกาศให้วัณโรคเป็นภาวะฉุกเฉินที่ต้องรีบจัดการทั่วโลก (A global TB emergency) เมื่อวันที่ 23 เดือน เมษายน พ.ศ. 2536 (พันธ์ชัย รัตนสุวรรณ . 2551) ปัจจุบันองค์การอนามัยโลกรายงานว่าพบผู้ป่วยวัณโรคหรือความชุก (Prevalence) ในภูมิภาคต่าง ๆ ของโลกประมาณ 16-20 ล้านคน ในจำนวนนี้ 8-10 ล้านคนกลุ่มที่กำลังแพร่เชื้อ (Highly infectious) และแต่ละปีจะมีผู้ป่วยรายใหม่ (Incidence) เพิ่มขึ้นประมาณ 8.4 ล้านคน มีผู้ป่วยวัณโรคเสียชีวิตปีละประมาณ 1.9 ล้านคน โดยร้อยละ 85 อยู่ในประเทศที่กำลังพัฒนา

เรือนจำเป็นสถานที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อวัณโรค เนื่องจากมีจำนวนผู้ต้องขังเป็นจำนวนมาก โดยพบว่ามีผู้ต้องขังทั่วโลกประมาณ 10 ล้านคน มีรายงานความรุนแรงของสถานการณ์วัณโรคในเรือนจำหลายแห่งทั่วโลกคือ ประเทศซาอุดิอาระเบีย พบว่าผู้ต้องขังมีอัตราป่วยวัณโรค 4,560 ต่อแสนประชากร ประเทศอาเซอร์ไบจัน พบผู้ต้องขังมีอัตราป่วยวัณโรค 4,667 ต่อแสนประชากรประเทศรัสเซีย พบผู้ต้องขังมีอัตราป่วยวัณโรค 7,000 ต่อแสนประชากร และในประเทศไทยในปีพ.ศ.2548 พบผู้ต้องขังป่วยวัณโรค1,340 ต่อแสนประชากร (พัชราภรณ์ ธรรมรังษ์.2552 : 1-2)จากสถานการณ์วัณโรคดังกล่าวจึงเป็นปัญหาทางด้านสาธารณสุขของเรือนจำ เนื่องจากเรือนจำมีปัจจัยเสี่ยง (risk factor) ทางด้านสภาพแวดล้อ ความเป็นอยู่ที่แออัด การหมุนเวียนและระบายของอากาศมีน้อยรวมทั้งภาวะทุพโภชนาการ ความเครียด ยาเสพติด และการติดเชื้อเอดส์ ประกอบกับเรือนจำ มีข้อจำกัดทางด้านทรัพยากรบุคลากรทางการแพทย์ทำให้ไม่สามารถจัดบริการสาธารณสุขให้กับผู้ต้องขังในเรือนจำซึ่งเป็นชุมชนหนึ่ง จึงควรมีการนำหลักการสาธารณสุขมูลฐานมาใช้ในเรือนจำ(พัชราภรณ์ ธรรมรังษ์ .2552) วัณโรคยังเป็นโรคติดต่อที่สำคัญที่เป็นสาเหตุการตายอันดับหนึ่งของผู้ต้องขัง การควบคุมวัณโรคในกลุ่มผู้ต้องขังของเรือนจำกลับยังไม่ค่อยได้รับความสนใจเท่าที่ควรทั้งๆ ที่อัตราป่วยวัณโรครายใหม่ระยะแพร่เชื้อของผู้ต้องขังในเรือนจำมีอัตราที่สูงกว่าประชากรทั่วไป อันจะส่งผลกระทบอย่างรุนแรงต่อชุมชนและสังคมเป็นทวีคูณ เพราะผู้ต้องขังและสภาวะในเรือนจำก่อให้เกิดการติดเชื้อและป่วยเป็นวัณโรคได้ง่าย ทั้งนี้เพราะในเรือนจำมีลักษณะจำเพาะทางประชากร และปัจจัยเสี่ยงของผู้ต้องโทษ สภาพความแออัด ปัญหาการติดสารเสพติด รวมทั้งการติดเชื้อเอดส์ และอากาศมีการหมุนเวียน

ระบายได้น้อย ทำให้เรือนจำมีแนวโน้มที่มีความชุกของวัณโรค และอุบัติการณ์ของวัณโรคสูงกว่าประชากรทั่วไป(ภิรมย์ กมลรัตนกุล . 2544 : 2) วัณโรคเป็นโรคติดเชื้อร้ายแรงที่สามารถแพร่กระจายทางอากาศไปสู่ผู้อื่นได้ง่าย ซึ่งมีผลทำให้ในเรือนจำมีการแพร่ระบาดของวัณโรคเพิ่มขึ้น เนื่องจากในเรือนจำมีความแออัดของประชากร และถ้าหากว่าทางเรือนจำมีการดูแลเรื่องการระบายอากาศภายในห้องพัก ให้มีการไหลเวียนอากาศที่ดี น่าจะทำให้การแพร่ระบาดของวัณโรคลดลง

วัณโรค (Tuberculosis หรือ TB) ซึ่งเป็นโรคเก่าที่ค้นพบมานานแล้ว ผู้ค้นพบสาเหตุของวัณโรค ชื่อ โรเบิร์ต ค๊อค (Robert Kock) นายแพทย์ชาวเยอรมัน ในปี พ.ศ. 2425 ได้ค้นพบเชื้อแบคทีเรียซึ่งเป็นสาเหตุของวัณโรคคือ Mycobacterium Tuberculosis แต่วัณโรคยังเป็นสาเหตุของการเสียชีวิตของประชากรโลกประมาณ 3 ล้านคนต่อปี และส่วนใหญ่เกิดในประเทศที่กำลังพัฒนาอุบัติการณ์ (Incidence of Pulmonary and Extrapulmonary Tuberculosis) ของวัณโรคประมาณ 8 ล้านคนต่อปี หรือ ร้อยละ 95 ของผู้ป่วยใหม่ (กรมควบคุมโรค . 2548) วัณโรคเป็นโรคติดเชื้อร้ายแรงที่สามารถแพร่กระจายทางอากาศไปสู่ผู้อื่นได้ง่าย ขณะที่ผู้ป่วยวัณโรค ไอ จาม หัวเราะ ร้องเพลง หรือพูด จะมีอนุภาคละอองเสมหะถูกขับกระเซ็นออกมาทางปากและจมูกลอยในอากาศ อนุภาคขนาดเล็กจะลอยอยู่ในอากาศถูกพัดพากระจายไปตามกระแสลมในห้องหรือบริเวณใกล้เคียง เมื่อมีผู้สูดอากาศหายใจเข้าอนุภาคละอองเสมหะจะเข้าสู่หลอดลมฝอยส่วนปลาย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เราสามารถทราบถึงการแพร่กระจายของวัณโรคและผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบที่เราสนใจสามารถช่วยให้เราเข้าใจถึงปัจจัยที่ควบคุมการแพร่ระบาดและเสถียรภาพของระบบการแพร่เชื้อในวงกว้าง และมีความเข้าใจที่ดีขึ้นเกี่ยวกับการติดต่อของโรค การพัฒนาของตัวแบบสามารถปรับเปลี่ยนตามลักษณะเฉพาะของโรคระบาดได้ ในขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูลจะแสดงให้เราเห็นถึงประสิทธิภาพ ไม่ใช่เพียงแต่เข้าใจวิวัฒนาการของการระบาดเท่านั้น แต่ยังเข้าใจถึงมาตรการควบคุมโรคเป็นอย่างไร ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ของการศึกษานี้จะเป็นประโยชน์อย่างสูงในการลดความเสี่ยงของการติดเชื้อโรควัณโรค

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ

แนวคิดทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ ในการวิจัยครั้งนี้ได้นำตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของวัณโรคจากความหนาแน่นประชากร:กรณีศึกษาค่ายอพยพในยูกานดา (Ssematimba . 2005) มาเป็นตัวแบบพื้นฐานที่นำมาพัฒนา โดยสนใจผลกระทบจากอัตราการไหลเวียนของอากาศในห้องพักผู้ต้องขัง และความเร็วไหลเวียนของอากาศในห้องพักผู้ต้องขัง เพราะอัตราวัณโรคในเรือนจำที่สูงกว่าประชากรทั่วไป และวัณโรคเป็นโรคติดเชื้อร้ายแรงที่สามารถแพร่กระจายทางอากาศไปสู่ผู้อื่นได้ง่าย ซึ่งมีผลทำให้ในเรือนจำมีการแพร่ระบาดของวัณโรคเพิ่มขึ้น เพราะเรือนจำมีความแออัดของประชากร ถ้ามีการระบายอากาศภายในห้องพัก การไหลเวียนอากาศที่ดี น่าจะทำให้การแพร่ระบาดของวัณโรคลดลง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นี้ได้แบ่งเป็นประชากรออกเป็น 4 กลุ่มย่อย ดังนี้ กลุ่มคนที่ไวต่อโรค กลุ่มที่มีเชื้อแฝง กลุ่มที่ติดโรค และกลุ่มคนที่มีภูมิคุ้มกันต่อโรค ซึ่งจากข้อมูลข้างต้นทำให้มีความเข้าใจถึงการแพร่ระบาดของวัณโรค จึงทำให้เราสามารถนำมาปรับปรุงมาตรการป้องกันและการควบคุมโรค

วิธีการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ โดยผู้วิจัยดำเนินการตาม 3 ขั้นตอน ดังนี้

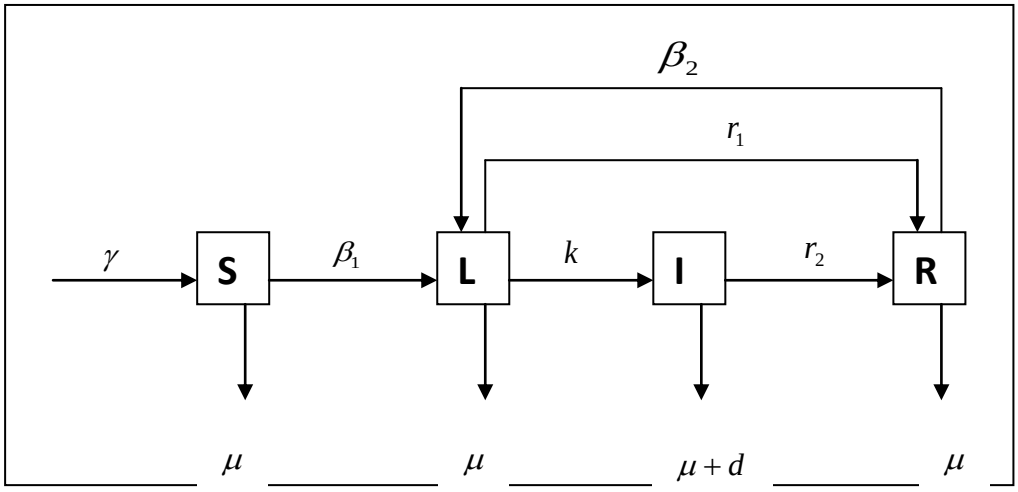
1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์
2. การตรวจสอบตัวแบบโดยผู้เชี่ยวชาญ
3. การวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ผลการวิจัย

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

ในการวิจัยนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำ ที่มีผลกระทบจากอัตราการไหลเวียนของอากาศในห้องพักผู้ต้องขัง และความเร็วไหลเวียนของอากาศในห้องพักผู้ต้องขัง ประกอบด้วย ประชากรผู้ต้องขังในเรือนจำ

จะแบ่งเป็น 4 กลุ่มคือ กลุ่มคนที่ไวต่อโรค(S) กลุ่มคนที่มีเชื้อแฝง(L) กลุ่มคนที่ติดโรค(I) และกลุ่มคนที่มีภูมิคุ้มกันต่อโรค (R) และสิ่งแวดล้อมที่เอื้อต่อการเจริญเติบโต โดยแผนภาพอธิบายแนวคิดในการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์แสดงได้ดังนี้ภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์

โดยที่ γ แทนอัตราผู้ต้องขังใหม่ , μ แทนอัตราการตายโดยธรรมชาติ, d แทนอัตราการตายของผู้ป่วยวัณโรค , β_1 แทนความน่าจะเป็นในการแพร่ระบาดของวัณโรค , β_2 แทนความน่าจะเป็นการมีภูมิคุ้มกัน , k แทนอัตราการแพร่ระบาดของวัณโรค , r_1 แทนอัตราการมีภูมิคุ้มกันของประชากรที่มีเชื้อแฝง , r_2 แทนอัตราการมีภูมิคุ้มกันของประชากรที่ติดโรค , c แทนอัตราการเป็นวัณโรค, A แทนพื้นที่ต่อประชากร, ε แทนอัตราการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักของผู้ต้องขัง , v แทนความเร็วของไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักของผู้ต้องขัง ซึ่งสามารถนำมาสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของวัณโรคของผู้ต้องขังในเรือนจำได้ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \gamma - \mu S - \beta_1 cS\frac{Iv}{Av+\varepsilon} \quad (1)$$

$$\frac{dL}{dt} = \beta_1 cS\frac{Iv}{Av+\varepsilon} - (\mu + k + r_1)L + \beta_2 cR\frac{Iv}{Av+\varepsilon} \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = kL - (\mu + d + r_2)I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = r_1 L + r_2 I - \mu R - \beta_2 cR\frac{Iv}{Av+\varepsilon} \quad (4)$$

เมื่อ ผลรวมของประชากรสามารถหาได้โดย $N = S + L + I + R$ และผลรวมสิ่งแวดล้อมที่เอื้อต่อแพร่ระบาดของวัณโรค สามารถหาได้โดย $N = \frac{\gamma - dI}{\mu}$

การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1. จุดสมดุล

จุดสมดุล สามารถหาได้จากการจัดสมการ (1), (2), (3)และ (4) ให้เท่ากับศูนย์ (Leah. E.K. ,1998)จะได้จุดสมดุลสองจุดคือ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค $E_0(S,L,I,R) = \left(\frac{\gamma}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ และจุดสมดุลที่เกิดการระบาดของโรค $E_1(S^*, L^*, I^*, R^*)$

เมื่อ $I_2^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4YZ}}{2Y}$,

$S^* = \frac{\gamma}{\mu + B_1 I^*}$, $L^* = \frac{I^*(B_1\mu\gamma + B_2\mu I^* r_2 + B_1 B_2 \gamma I^* + B_1 B_2 I^* r_2)}{(\mu + B_1 I^*)(\mu\beta_1 + \mu k + \mu^2 + B_2 k I^* + B_2 \mu I^*)}$,

และ $R^* = \frac{I^*\{(\mu + k)r_2(\mu + B_1 I^*) + r_1(\mu r_2 + B_1(\gamma + I^* r_2)\}}{(\mu + B_1 I^*)(\mu r_1 + (k + \mu))(\mu + B_2 I^*))}$

2. ความเสถียรภาพ

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาจากค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียน (Esteva .L and Vagus.C,1998) จากระบบสมการ (1), (2), (3) และ (4) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์จาโคเบียนได้ดังนี้

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -B_1 S & 0 \\ 0 & -(\mu + k + r_1) & B_1 S & 0 \\ 0 & k & -(\mu + d + r_2) & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 & -\mu \end{bmatrix}$$

พิจารณาหาค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมการลักษณะเฉพาะโดยให้ $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ ณ จุด E_0 เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ 4×4 จุดสมดุลที่ไม่มีโรค E_0 จากการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะคือ

$\lambda_{1,2} = -\mu, \lambda_3 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4D}}{2}$, $\lambda_4 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4D}}{2}$ และ

$(-\mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(\lambda^2 + A\lambda + D) = 0$ โดยที่ $n = 2 : A > 0$ และ $D > 0$ สอดคล้องกับเงื่อนไข Routh-Hurwitz

โดยที่ A = $(2\mu + d + r_1 + r_2 + k)$, D = $(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) - kB_1 S$

ดังนั้นจุดสมดุลที่ไม่มีโรค E_0 มีความเสถียรภาพเมื่อ $\Re_0 < 1$ โดยที่

ค่าระดับการติดเชื้อของโรค $\Re_0 = \sqrt{\frac{B_1 \gamma k}{\mu(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2)}}$

จุดสมดุลที่เกิดการระบาดของโรค $E_1(S^*, L^*, I^*, R^*)$ สมการลักษณะเฉพาะ (Esteva .L and Vagus.C,1998) คือ

$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0$ โดยที่ $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > 0$, $b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1^2 b_4$ สอดคล้องกับเงื่อนไข Routh-Hurwitz (Leah.E.K.,1998)

เมื่อ $b_1 = (\mu + d + r_2) + (\mu + k + r_1) + (\mu + B_1 I) + (\mu + B_2 I)$

$b_2 = k(B_1 S + B_2 R) + (\mu + B_1 I)(\mu + d + r_2) + (\mu + d + r_2) + (\mu + B_1 I)) + ((\mu + k + r_1) + (\mu + B_2 I)) + (\mu + k + r_1)(\mu + B_2 I) - (r_1 B_2)$

$b_3 = ((\mu + B_1 I) + (\mu + B_2 I))k(B_1 S + B_2 R) + (kB_2(r_2 - (B_2 R))) + (k((B_1)^2 IS) + (\mu + d + r_2)(\mu + B_1 I)((\mu + k + r_1)) + (\mu + B_2 I)) + (\mu + k + r_1)(\mu + B_2 I)((\mu + d + r_2)) + (\mu + B_1 I)) - (r_1 B_2((\mu + d + r_2)) + (\mu + B_1 I))$

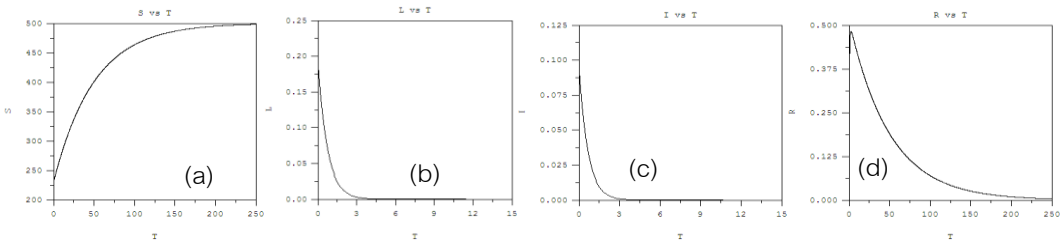
$b_4 = (\mu + B1I)(\mu + B2I)(B1S + B2R)k + B2k(\mu + B1I)(r_2 - (B2R)) + ((\mu + B2I)(B1)^2 SIk) + (\mu + d + r_2)(\mu + k + r_1)(\mu + B1I)(\mu + B2I)) - (r_1 B2(\mu + B1I)(\mu + d + r_2))$

ดังนั้นจุดสมดุลที่เกิดการระบาดของโรคมีความเสถียรภาพเมื่อ $\Re_0 > 1$ โดยที่

ค่าระดับการติดเชื้อของโรค $\Re_0 = \sqrt{\frac{B_1 \gamma k}{\mu(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2)}}$

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

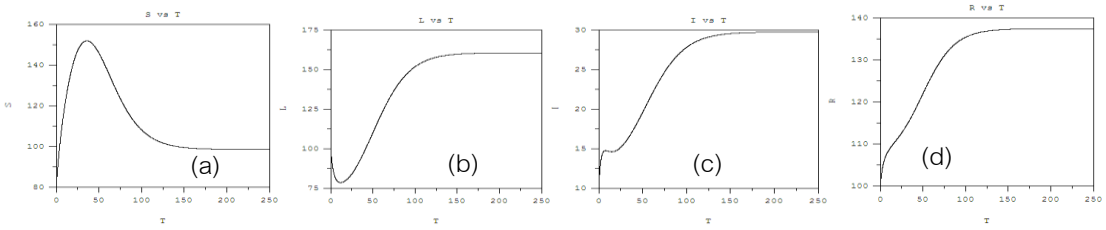
ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูลเชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจากงานวิจัย (Ssemtimba. 2005) ผลวิเคราะห์เชิงตัวเลขดังภาพที่ 2-3



ภาพที่ 2 คำตอบของสมการ (1), (2), (3)และ (4) ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค ดังนี้ (a) กลุ่มประชากรที่ไวต่อโรค (b) กลุ่มประชากรที่มีเชื้อแฝง (c) กลุ่มประชากรที่ติดโรค และ(d) กลุ่มประชากรที่มี

ภูมิคุ้มกัน โดยที่ $\Re_0$ = 0.03598 < 1 γ =10 , μ =0.02 , β_1 =0.15 , β_2 =0.2 , k =0.005 , r_1 =1.5 , r_2 =1.5 , c =0.5 , A =60 , ε =0.1 , ν =0.2

และค่าลักษณะเฉพาะ คือ λ_1 = - 2.2215 และ λ_2 = - 0.8735



ภาพที่ 3 คำตอบของสมการ (1), (2), (3)และ (4) ณ จุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค ดังนี้ (a) กลุ่มประชากรที่ไวต่อโรค (b) กลุ่มประชากรที่มีเชื้อแฝง (c) กลุ่มประชากรที่ติดโรค และ (d) กลุ่มประชากรที่มีภูมิคุ้มกัน โดยที่ $\Re_0$ = 1.462 > 1 γ =10 , μ =0.02 , β_1 =0.15 , β_2 =0.2 , k =0.005 , r_1 =0.025, r_2 =0.2 , c =0.9 , d =0.05 , A =65 , ε =0.5 , ν =1 และค่าลักษณะเฉพาะ คือ λ_1 =-0.1016, λ_2 = - 0.1367 , λ_3 = - 0.1774-0.1558i , λ_4 =-0.1774+0.1558i

สรุป

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อศึกษาจุดสมดุลของระบบ ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล และตรวจสอบเสถียรภาพของจุดสมดุลว่าเป็น Local asymptotically stable และตรวจสอบว่าสอดคล้องตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz ในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค พบว่าค่าระดับการติดเชื้อ ($\Re_0$) เท่ากับ 0.03598 และจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค เมื่อพิจารณาให้พารามิเตอร์ เพื่อศึกษาใน 3 กรณี คือ

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ พื้นที่ต่อประชากร (A) พบว่าการเพิ่มค่าพื้นที่ต่อประชากร ทำให้ค่าสมการลักษณะเฉพาะและหาคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะเป็นไปตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz และค่า $\Re_0$ มีค่าลดลง และเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ $\Re_0 > 1$ ดังนั้นการเพิ่มพื้นที่ต่อประชากร จึงมีผลทำให้เกิดการแพร่ระบาดของวัณโรคในเรือนจำลดลง

2. เมื่อค่าพารามิเตอร์อัตราการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักผู้ต้องขังในเรือนจำ(ε) พบว่าเมื่อเพิ่มอัตราการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักผู้ต้องขังในเรือนจำ ทำให้ค่าสมการลักษณะเฉพาะและหาคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะเป็นไปตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz และค่า $\Re_0$ มีค่าลดลง และเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ $\Re_0 > 1$ ดังนั้นการเพิ่มอัตราการไหลเวียน

ของอากาศภายในห้องพักผู้ต้องขังในเรือนจำ จึงมีผลทำให้เกิดการแพร่ระบาดของวัณโรคในเรือนจำลดลง

3. เมื่อค่าพารามิเตอร์ความเร็วของการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักผู้ต้องขังในเรือนจำ(v) พบว่าเมื่อลดความเร็วของการไหลเวียนของอากาศภายในห้องพักผู้ต้องขังในเรือนจำทำให้ค่าสมการลักษณะเฉพาะและหาคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะเป็นไปตามเงื่อนไข Routh-Hurwitz และค่า $\Re_0$ มีค่าลดลง และเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ $\Re_0 > 1$ ดังนั้นการเพิ่มพื้นที่ต่อประชากร จึงมีผลทำให้เกิดการแพร่ระบาดของวัณโรคในเรือนจำลดลง

ข้อเสนอแนะ

1. ในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยนำข้อมูลส่วนใหญ่ได้จากสาธารณสุขจังหวัด ซึ่งความเป็นจริงควรได้ข้อมูลจากเรือนจำ ในการวิจัยครั้งต่อไปควรใช้ข้อมูลจากเรือนจำ

2. ควรนำข้อมูลจริงมาใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของตัวแบบ เพื่อศึกษาความเป็นไปได้ของคำตอบเชิงตัวเลขว่ามีความสอดคล้องกับข้อมูลจริง

คำขอบคุณ

ผู้เขียนขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี เรือนจำกลางจังหวัดสุราษฎร์ธานี สาธารณสุขจังหวัดสุราษฎร์ธานี และผู้เกี่ยวข้องทุกท่าน

เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค. (2548). *MANAGEMENT OF TUBERCULOSIS*. กลุ่มวัณโรคสำนักโรคเอดส์ วัณโรคและโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์.

นิ่น ต่อดา ทวิน. (2551). *พฤติกรรมในการป้องกันวัณโรคของผู้อพยพชาวพม่าในเขต อ.เมือง จ.ภูเก็ต ประเทศไทย*. วิทยานิพนธ์สาธารณสุขศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการพัฒนาระบบสาธารณสุข วิทยาลัยวิทยาศาสตร์สาธารณสุข จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พัชราภรณ์ ธรรมรังษ์. (2552). *ความรู้และการปฏิบัติในการป้องกันวัณโรคของอาสาสมัครสาธารณสุขในเรือนจำจังหวัดลำพูน*. มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

พันธ์ชัย รัตนสุวรรณ. (2551). *ระบาดวิทยาและวัณโรค*. สำนักงานป้องกันโรคที่ 11.

ภาพตะวัน ลยารมย์ และ จุฑา พิชิตลำเค็ญ. (2553). *ตัวแบบระบบพลวัตสำหรับการแพร่กระจายของโรคเอดส์ในประเทศไทย*. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ภิรมย์ กมลรัตนกุล. (2544). *รูปแบบการควบคุมวัณโรคในเรือนจำของประเทศไทย*. วิทยาลัยป้องกันอาณาจักร

มูลนิธิวิจัยวัณโรคและโรคเอดส์และสถาบันวิจัยวัณโรคสมาคมปราบวัณโรคแห่งประเทศญี่ปุ่น. (2552). *รู้ทันวัณโรค*. บริษัทศรีเมืองการพิมพ์จำกัด: สำนักงานหลักประกันสุขภาพแห่งชาติ

วราภรณ์ พิมา. (2551). *การวิเคราะห์ปัจจัยเสี่ยงและการจัดจำแนกกลุ่มของผู้ป่วยวัณโรคปอดที่เกิดโรคกลับต่อการดื้อยา*. มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

สุรพล เนาวรัตน์ วลัยพรรณ ถาวะรัตน์ และ อี หมิง ถัง. (2554). *การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคซิคุนกุนยาโดยการใช้ยาฆ่าตัวเต็มวัย*. มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

Cagri Ozcaglar. (2012). *Epidemiological Models of Mycobacterium tuberculosis complex infections*. from www.elsevier.com/locate/mbs.

Enagi A.I. and Ibrahim M.O. (2011). *Preventing Mother to Child Transmission of Tuberculosis Using Bacillus Calmette-Guerin Vaccine*. Federal University of Technolog. from http://maxwellsci.com/print/rjms/v3-67-71.pdf

P. van den Driesche and Jame Watmough. (2002). *Reproduction number and sub-threshold endemic equilibriums for compartmental models of disease transmission*. Mathematical Biosciences .

Ssemtimba A , Mugisha J.Y.T. and Luboobi L.S. (2005). *Mathematical Models for the Dynamics of Tuberculosis in Density-dependent Populations: The Case of Internally Displaced Peoples'Camps (IDPCs) in Uganda*

World Health Organization. (November 9, 2011). *GLOBAL TUBERCULOSIS CONTROL*. from www.who.int/tb/data.

Yicang Zhou. (2008). *Projection of tuberculosis incidence with increasing immigration trends*. from www.elsevier.com/locate/yjtbi.